Le micromagnétisme
Une brève modélisation

Les équations de Maxwell s'écrivent généralement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\partial_t D + \operatorname{rot} H &= j \\ \partial_t B + \operatorname{rot} E &= 0 \\ D &= \varepsilon E \\ B &= \mu H \end{aligned}$$

où, l'on note (à t fixé, vu que les champs dépendent également du temps) :

- $D : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'induction électrique ;
- $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ le champ magnétique ;
- $B : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'induction magnétique ;
- $E : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ le champ électrique ;
- $\varepsilon : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_+$ la perméabilité ;
- $\mu : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_+$ ma permittivité ;
- $j : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la densité de courant.

Il s'agit d'un comportement linéaire, au sens où la dépendance des champs entre eux est donnée par des équations (aux dérivées partielles) linéaires.

Dans certaine situations, ces équations ne sont plus réalisées de manière aussi simple, car il faut considérer des interactions du champs électromagnétique avec la matière. Par exemple, si l'on considère des matériaux dits ferro-électrique, on doit introduire un champ supplémentaire P (appelé la polarisation); la troisième équation est remplacée par:

$$D = \varepsilon E + P$$

P est alors soit donnée, soit vérifie une équation (éventuellement aux dérivées partielles) faisant souvent intervenir le champ électrique E.

Le cadre du micromagnétisme est similaire (du moins dans sa présentation, les propriétés qualitatives des solutions étant radicalement différentes). Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en compte un champ d'aimantation M, rajouté dans la quatrième équation de la manière suivante

$$B = \mu(H + M)$$

L'aimantation M dépend alors le plus souvent de H. Un modélisation très simple donne une association linéaire entre M et H

$$M = \chi H$$

χ est appelé la susceptibilité magnétique. Une autre modélisation du comportement de M (celle qui m'intéresse) est donné par une équation différetielle (en temps), qu'on appelle équation de Landau-Lishitz :

$$\partial_t M = \bar{\gamma} M \wedge H + \frac{\alpha}{|M|} \partial_t M \wedge M$$

équation équivalente à l'équation suivante (avec $(1+\alpha^2)^{-1}\bar{\gamma} = \gamma$), plus agréable à manipuler :

$$\partial_t M = \gamma \left(M \wedge H + \frac{\alpha}{|M|} M \wedge (M \wedge H) \right)$$

Dans un cadre plus général, il nous faudrait remplacer dans l'équation de Landau-Lifshitz H par $H + H_{\text{eff}}(M)$, où $H_{\text{eff}}(M)$ est un champ purement mathématique (sans raison d'être physique) permettant la prise en compte d'autres réalités physiques avec l'aimantation M (parmi lesquelles l'interaction avec un champ H_s appliqué, l'anisotropie d'un milieu cristallin privilégiant certaine directions à d'autres, énergie d'échange interdisant les variations spatiales de M trop brutales...). Dans notre cadre de travail mathématique, on supposera $H_{\text{eff}}(M) = 0$.