# Analyse des Programmes et Sémantique (8)

Prof[r] Jacques Malenfant

(cours de J.Malenfant modifié et enseigné en 2013 par Basile Starynkévitch)

janvier-avril 2013

MI030 - APS

Cours (en M1) du Professeur Jacques Malenfant
http://pagesperso-systeme.lip6.fr/Jacques.Malenfant/ Professeur en informatique au Laboratoire d'Informatique de Paris 6

Enseigné en 2013 par Basile Starynkevitch
http://starynkevitch.net/Basile/
basile@starynkevitch.net & basile.starynkevitch@cea.fr
ingénieur chercheur au CEA, LIST - http://www-list.cea.fr/
travaille sur gcc-melt.org

## ♠ Nota Bene

Les transparents à fond rose (pages numérotées ♠) et les mots ♠ signalés ainsi ♣ sont de Basile Starynkevitch (dont les opinions n'engagent que lui) ♠

La plupart des transparents sont [recopiés de ceux] de J.Malenfant 2012, que je remercie. Ces transparents sont disponibles sous http://starynkevitch.net/Basile/

ce $8^{eme}$ cours est la suite du cours 8 de J.Malenfant

1 Sémantique dénotationnelle de BOPL
- Équations sémantiques

# Déjà vu

A propos de la sémantique dénotationnelle de BOPL on a déjà vu :

- l'auto-référence comme **point fixe** d'un *générateur* de **`Point`** via **fix**$(\lambda self.\{x \mapsto 3, \ldots$
- l'*enveloppe* ou *wrapper* à la Cook et Palsberg $\lambda self.\lambda super.\ldots$.
- le passage en paramètre de la partie de l'objet cercle qui est héritée de `Point`
- l'opérateur de composition $\triangleright$ de Cook et Palsberg
- les domaines sémantiques de de BOPL
- les fonctions sémantiques : environnement, mémoire, dictionnaire de méthodes, classes et objets, la classe **`Object`**, son générateur d'objets, la création d'objets

1 Sémantique dénotationnelle de BOPL
- Équations sémantiques

# Équations sémantiques : Fonctions et types

$$
\begin{array}{lcl}
\mathscr{P} & : & \mathit{Program} \to (\Sigma \otimes \mathbf{Out}) \\
\mathscr{K} & : & \mathit{Class} \to \mathbf{Env} \to \mathbf{Env} \\
\mathscr{K}^* & : & \mathit{Class}^* \to \mathbf{Env} \to \mathbf{Env} \\
\mathscr{CE} & : & \mathit{CExp} \to \mathbf{Ide} \\
\mathscr{V} & : & \mathit{Var} \to \mathbf{Ide} \\
\mathscr{V}^* & : & \mathit{Var}^* \to \mathbf{Ide}^* \\
\mathscr{M} & : & \mathit{Method} \to \mathbf{Class} \to \mathbf{Dict} \to \mathbf{Dict} \\
\mathscr{M}^* & : & \mathit{Method}^* \to \mathbf{Class} \to \mathbf{Dict} \to \mathbf{Dict} \\
\mathscr{C} & : & \mathit{Instructions} \to \mathbf{Env} \to \Sigma \to \mathbf{Out} \to (\Sigma \otimes \mathbf{Out}) \\
\mathscr{E} & : & \mathit{Expressions} \to \mathbf{Env} \to \Sigma \to \mathbf{Out} \to (\mathbf{EV} \otimes \Sigma \otimes \mathbf{Out}) \\
\mathscr{E}^* & : & \mathit{Expressions}^* \to \mathbf{Env} \to \Sigma \to \mathbf{Out} \to (\mathbf{EV}^* \otimes \Sigma \otimes \mathbf{Out}) \\
\mathscr{I} & : & \mathit{Identifiers} \to \mathbf{Ide} \\
\mathscr{I}^* & : & \mathit{Identifiers}^* \to \mathbf{Ide}^* \\
\mathscr{Z} & : & \mathit{Numbers} \to \mathbf{Z}
\end{array}
$$

# Équations sémantiques : Programmes

$$\mathscr{P}[\![\texttt{program}\ c^*\ v^*\ i]\!] =$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{let}* \ ide^* = \mathscr{V}^*[\![v^*]\!] \\
&\textbf{and}\ \rho = (((extendEnv\ emptyEnv)\ \mathscr{I}[\![\texttt{Object}]\!])\ in\mathbf{DV}_2(theObjectClass)) \\
&\textbf{and}\ (\sigma, loc^*) = ((allocate*\ emptyStore)\ \sharp ide^*) \\
&\textbf{and}\ \rho_1 = (((extendEnv*\ \rho)\ ide^*)\ in\mathbf{DV}_1^*(in\mathbf{LV}_1^*(loc^*))) \\
&\textbf{in}\ (((\mathscr{C}[\![i]\!]\ \mathscr{K}^*[\![c^*]\!]\rho_1)\ \sigma)\ emptyOut)
\end{aligned}$$

♠ NB : $in\mathbf{DV}_2$ est une injection de domaine ♣

# Équations sémantiques : variables

$$\mathscr{V}^*[\![v^*]\!] = \textbf{let } loop = \lambda f.\lambda v^*.$$
$$\textbf{if } \neg null(v^*)$$
$$\textbf{then } (prefix\ \mathscr{V}[\![head(v^*)]\!]\ (f\ (tail\ v^*)))$$
$$\textbf{else } \langle nil, 0 \rangle$$
$$\textbf{in } ((\textbf{fix } loop)\ v^*)$$

$$\mathscr{V}[\![\texttt{var } ce\ id]\!] = \mathscr{I}[\![id]\!]$$

# Équations sémantiques : les classes

$$\mathscr{K}^*[\![c^*]\!]\rho = \textbf{let } loop = \lambda f.\lambda c^*.\lambda\rho$$
$$\textbf{if } \neg null(c^*)$$
$$\textbf{then } ((f\ (tail\ c^*))\ \mathscr{K}[\![head(c^*)]\!]\rho)$$
$$\textbf{else } \rho$$
$$\textbf{in } (((\textbf{fix } loop)\ c^*)\ \rho)$$

$$\mathscr{K}[\![\texttt{class } id\ ce\ v^*\ m^*]\!]\rho =$$

$$\textbf{let}* ide = \mathscr{I}[\![id]\!]$$
$$\textbf{and } super = out\textbf{Class}(\rho\ \mathscr{CE}[\![ce]\!])$$
$$\textbf{in } (((extendEnv\ \rho)\ ide)$$
$$in\textbf{DV}_2((((make\text{-}ClassWrapper\ ide)\ \mathscr{V}^*[\![v^*]\!])\ \mathscr{M}^*[\![m^*]\!]super)\ super))$$

♠ NB : *out***Class** est une projection de domaine somme ♣

# Équations sémantiques : les expressions de classes (types)

$$\mathscr{CE}[\![\texttt{cexp}\ id]\!] = \mathscr{I}[\![id]\!]$$

# Équations sémantiques : les méthodes

$$\mathscr{M}^*[\![m^*]\!] = \lambda super.$$
$$\textbf{let } loop = \lambda f.\lambda m^*.\lambda d.$$
$$\textbf{if } \neg null(m^*)$$
$$\textbf{then } ((f\ tail(m^*))\ (\mathscr{M}[\![head(m^*)]\!] super\ d))$$
$$\textbf{else } d$$
$$\textbf{in } (((\textbf{fix } loop)\ m^*)\ emptyDict)$$

$$\mathscr{M}[\![\texttt{method}\ id\ v_1^*\ ce\ v_2^*\ i]\!] =$$
$$\lambda super.\lambda d.$$
$$\textbf{let } ide = \mathscr{I}[\![id]\!]$$
$$\textbf{in } (((extendDict\ d)\ ide)$$
$$in(\textbf{Method} \oplus \textbf{U})_1((((make\text{-}method\ \mathscr{V}^*[\![v_1^*]\!])\ \mathscr{V}^*[\![v_2^*]\!])\ i)\ super)$$

# Équations sémantiques : les instructions `seq` et `assign`

$$\mathscr{C}[\![\texttt{seq}\ i_1\ i_2]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}\ \langle \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{C}[\![i_1]\!]\rho\sigma o\ \textbf{in}\ \mathscr{C}[\![i_2]\!]\rho\sigma_1 o_1$$

$$\begin{aligned}\mathscr{C}[\![\texttt{assign}\ id\ e]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}\ &\langle ev, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o\\ \textbf{in}\ &\langle (((updateStore\ \sigma_1)\ out\textbf{Loc}(out\textbf{LV}(\rho\ \mathscr{I}[\![id]\!])))\ \textbf{EV}to\textbf{SV}(ev))),\\ &\ o_1\rangle\end{aligned}$$

# Équations sémantiques : l'instruction `writefield`

$$\mathscr{C}[\![\texttt{writefield}\ e_1\ id\ e_2]\!]\rho\sigma o =$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{let}* \langle ev, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o\\
&\textbf{and}\ obj = out\textbf{Object}(\sigma_1\ \textbf{Oid}to\textbf{Loc}(out\textbf{Oid}(out\textbf{RV}(ev))))\\
&\textbf{and}\ \langle ev_2, \sigma_2, o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1\\
&\textbf{in}\ \langle((((obj\ 1)\ \mathscr{I}[\![id]\!])\ \textbf{EV}to\textbf{SV}(ev_2))\ \sigma_2), o_2\rangle
\end{aligned}$$

$$\mathscr{C}[\![\texttt{writefield self}\ id\ e]\!]\rho\sigma o =$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{let}* obj = out\textbf{Object}(\rho\ \mathscr{I}[\![\texttt{self}]\!])\\
&\textbf{and}\ \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o\\
&\textbf{in}\ \langle((((obj\ 1)\ \mathscr{I}[\![id]\!])\ \textbf{EV}to\textbf{SV}(ev))\ \sigma_1), o_1\rangle
\end{aligned}$$

# Équations sémantiques : les instructions `if` et `while`

$$\mathscr{C}[\![\texttt{if}\ e\ i_1\ i_2]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}* \langle ev, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{in}\quad \textbf{if}\ \mathit{out}\textbf{T}(\mathit{out}\textbf{V}(\mathit{out}\textbf{RV}(ev)))$$
$$\textbf{then}\ \mathscr{C}[\![i_1]\!]\rho\sigma_1 o_1$$
$$\textbf{else}\ \mathscr{C}[\![i_2]\!]\rho\sigma_1 o_1$$

$$\mathscr{C}[\![\texttt{while}\ e\ i]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}\ \mathit{loop} = \lambda f.\lambda\sigma.\lambda o.$$
$$\textbf{let}\ \langle ev, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{in if}\ \mathit{out}\textbf{T}(\mathit{out}\textbf{V}(\mathit{out}\textbf{RV}(ev)))$$
$$\textbf{then let}\ \langle \sigma_2, o_2\rangle = \mathscr{C}[\![i]\!]\rho\sigma_1 o_1$$
$$\textbf{in}\ ((f\ \sigma_2)\ o_2)$$
$$\textbf{else}\ \langle \sigma_1, o_1\rangle$$
$$\textbf{in}\ (((\textbf{fix}\ \mathit{loop})\ \sigma)\ o)$$

# Équations sémantiques : les instructions `return` et `writeln`

$$\mathscr{C}[\![\texttt{return}\ e]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}\ \langle ev, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{in}\ \langle(((\mathit{updateStore}\ \sigma_1)\ \mathit{out}\textbf{Loc}(\mathit{out}\textbf{LV}(\rho\ \mathscr{I}[\![\texttt{return}]\!])))$$
$$\textbf{EV}\mathit{to}\textbf{SV}(ev)), o_1\rangle$$

$$\mathscr{C}[\![\texttt{writeln}\ e]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}\ \langle ev, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{in}\ \langle\sigma_1, (\mathit{affix}\ o_1\ \textbf{EV}\text{->string}(ev))\rangle$$

# Équations sémantiques : les expressions I

$$\mathscr{E}[\![n]\!]\rho\sigma o = \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_2(\mathscr{Z}[\![n]\!]))), \sigma, o\rangle$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{true}]\!]\rho\sigma o = \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_1(true))), \sigma, o\rangle$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{false}]\!]\rho\sigma o = \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_1(false))), \sigma, o\rangle$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{not } e]\!]\rho\sigma o = \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_1(\neg out\mathbf{T}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(\mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o)))))), \sigma, o\rangle$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{nil}]\!]\rho\sigma o = \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_2(in\mathbf{Oid}_2(nil))), \sigma, o\rangle$$

# Équations sémantiques : les expressions II

$$\mathscr{E}[\![\texttt{new}\ ce]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}\ \langle oid, \sigma_1\rangle = ((out\textbf{Class}(\rho\ \mathscr{CE}[\![ce]\!])\ 2)\ \sigma)$$
$$\textbf{in}\ \langle in\textbf{EV}_1(in\textbf{RV}_2(oid)), \sigma_1, o\rangle$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{instanceof}\ e\ ce]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}*\ \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{and}\ obj = out\textbf{Object}(\sigma_1\ \textbf{Oid}to\textbf{Loc}(out\textbf{RV}(ev_1))))$$
$$\textbf{in}\ \langle((obj\ 3)\ \mathscr{CE}[\![ce]\!]), \sigma_1, o_1\rangle$$

# Équations sémantiques : les expressions III

$$\mathscr{E}[\![\texttt{methodcall self } id\ e^*]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}* \langle ev_1^*, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}^*[\![e^*]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{and } obj = out\textbf{Object}(\rho\ \mathscr{I}[\![\texttt{self}]\!])$$
$$\textbf{in } ((((((obj\ 2)\ \mathscr{I}[\![id]\!])\ \rho)\ \rho)\ \sigma_2)\ o_2)\ \textbf{EV}^*\ to\textbf{PV}^*(ev_1^*))$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{methodcall super } id\ e^*]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}* \langle ev_1^*, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}^*[\![e^*]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{and } obj = out\textbf{Object}(\rho\ \mathscr{I}[\![\texttt{self}]\!])$$
$$\textbf{and } s = out\textbf{Class}(\rho\ \mathscr{I}[\![\texttt{super}]\!])$$
$$\textbf{in } ((((((s\ 0)\ \mathscr{I}[\![id]\!])\ obj)\ \rho)\ \sigma_2)\ o_2)\ \textbf{EV}^*\ to\textbf{PV}^*(ev_1^*))$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{methodcall } e\ id\ e^*]\!]\rho\sigma o = \textbf{let}* \langle ev_1^*, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}^*[\![e^*]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{and } \langle ev_2, \sigma_2, o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma_1 o_1$$
$$\textbf{and } obj = out\textbf{Object}(\sigma_2\ \textbf{Oid}to\textbf{Loc}(out\textbf{Oid}(out\textbf{RV}(ev_2))))$$
$$\textbf{in } ((((((obj\ 2)\ \mathscr{I}[\![id]\!])\ \rho)\ \rho)\ \sigma_2)\ o_2)\ \textbf{EV}^*\ to\textbf{PV}^*(ev_1^*))$$

# Équations sémantiques : les expressions IV

$$\mathscr{E}[\![\texttt{readfield self } id]\!]\rho\sigma o = \textbf{let*}\ \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{and}\ obj = out\textbf{Object}(\rho\ \mathscr{I}[\![\texttt{self}]\!])$$
$$\textbf{in}\ \langle(((obj\ 0)\ \mathscr{I}[\![id]\!])\ \sigma_1), \sigma_1, o_1\rangle$$

$$\mathscr{E}[\![\texttt{readfield } e\ id]\!]\rho\sigma o = \textbf{let*}\ \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e]\!]\rho\sigma o$$
$$\textbf{and}\ obj = out\textbf{Object}(\sigma_1\ \textbf{Oid}to\textbf{Loc}(out\textbf{Oid}(out\textbf{RV}(ev_1))))$$
$$\textbf{in}\ \langle(((obj\ 0)\ \mathscr{I}[\![id]\!])\ \sigma_1), \sigma_1, o_1\rangle$$

# Équations sémantiques : les expressions V

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[\![\texttt{plus}\ e_1\ e_2]\!]\rho\sigma o = \ & \textbf{let}* \langle ev_1,\sigma_1,o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o \\ & \textbf{and}\ \langle ev_2,\sigma_2,o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1 \\ & \textbf{in}\ \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_2(out\mathbf{Z}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_1)))+ \\ & \qquad out\mathbf{Z}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_2)))))),\sigma_2,o_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[\![\texttt{minus}\ e_1\ e_2]\!]\rho\sigma o = \ & \textbf{let}* \langle ev_1,\sigma_1,o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o \\ & \textbf{and}\ \langle ev_2,\sigma_2,o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1 \\ & \textbf{in}\ \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_2(out\mathbf{Z}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_1)))- \\ & \qquad out\mathbf{Z}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_2)))))),\sigma_2,o_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[\![\texttt{times}\ e_1\ e_2]\!]\rho\sigma o = \ & \textbf{let}* \langle ev_1,\sigma_1,o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o \\ & \textbf{and}\ \langle ev_2,\sigma_2,o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1 \\ & \textbf{in}\ \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_2(out\mathbf{Z}((out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_1)))\times \\ & \qquad out\mathbf{Z}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_2)))))),\sigma_2,o_2\rangle\end{aligned}$$

# Équations sémantiques : les expressions VI

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[\![\texttt{equal}\ e_1\ e_2]\!]\rho\sigma o = \ & \textbf{let}* \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o \\ & \textbf{and}\ \langle ev_2, \sigma_2, o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1 \\ & \textbf{in}\ \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_1(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_1)) = \\ & \qquad out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_2))))), \sigma_2, o_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[\![\texttt{and}\ e_1\ e_2]\!]\rho\sigma o = \ & \textbf{let}* \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o \\ & \textbf{and}\ \langle ev_2, \sigma_2, o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1 \\ & \textbf{in}\ \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_1(out\mathbf{T}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_1)))\wedge \\ & \qquad out\mathbf{T}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_2)))))), \sigma_2, o_2\rangle\end{aligned}$$

♠ NB : noter que ***and*** est strict ; qu'en serait-il s'il était paresseux ? ♣

# Équations sémantiques : les expressions VII

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[\![\texttt{or}\ e_1\ e_2]\!]\rho\sigma o = \ & \textbf{let}* \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o \\ & \textbf{and}\ \langle ev_2, \sigma_2, o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1 \\ & \textbf{in}\ \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_1(out\mathbf{T}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_1)))\vee \\ & \qquad out\mathbf{T}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_2)))))), \sigma_2, o_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[\![\texttt{less}\ e_1\ e_2]\!]\rho\sigma o = \ & \textbf{let}* \langle ev_1, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![e_1]\!]\rho\sigma o \\ & \textbf{and}\ \langle ev_2, \sigma_2, o_2\rangle = \mathscr{E}[\![e_2]\!]\rho\sigma_1 o_1 \\ & \textbf{in}\ \langle in\mathbf{EV}_1(in\mathbf{RV}_1(in\mathbf{V}_1(out\mathbf{Z}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_1))) < \\ & \qquad out\mathbf{Z}(out\mathbf{V}(out\mathbf{RV}(ev_2)))))), \sigma_2, o_2\rangle\end{aligned}$$

# Équations sémantiques : les listes d'expressions

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}^*[\![e^*]\!]\rho\sigma o = \textbf{let } \mathit{loop} = \textbf{fix}(\lambda f.\lambda e^*.\lambda\sigma.\lambda o.\\
&\textbf{if } \neg(\mathit{null}\ e^*) \textbf{ then}\\
&\quad \textbf{let}* \langle ev, \sigma_1, o_1\rangle = \mathscr{E}[\![(\mathit{head}\ e^*)]\!]\rho\sigma o\\
&\quad \textbf{and } \langle ev^*, \sigma_2, o_2\rangle = ((((f\ (\mathit{tail}\ e^*))\ \rho)\ \sigma_1)\ o_1)\\
&\quad \textbf{in } \langle(\mathit{prefix}\ ev\ ev^*), \sigma_2, o_2\rangle\\
&\textbf{else}\\
&\quad \langle\langle \mathit{nil}, 0\rangle, \sigma, o\rangle)\\
\textbf{in } (((\mathit{loop}\ e^*)\ \sigma)\ o)
\end{aligned}
$$